Notes GSC 03/10/2023

P_0 safety
$\sigma_0 : V^*V_0 \rightarrow P(V)$
$\sigma_0(\pi u) \subseteq post(u)$
Safety est plus permissif que Reach

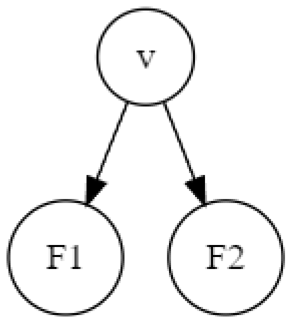
L’ensemble des sommets non-safe (ceux à partir desquels P_1 peut atteindre B)

$X_0 := B$
$X_k := \{u \in V_1 | post(u) \cap X_{k-1} \neq \emptyset\} \cup \{u \in V_0 | post(u) \subseteq X_{k-1}\} \cup X_{k-1}$

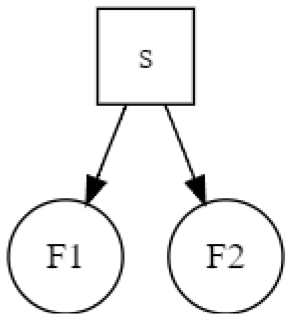
$X = \bigcup_{i \geq 0} X_i$

V\X Dans G|v-x, tous les coups de P_0 sont safe

$Attr_0(F_1 \cap F_2) \subseteq Attr_0(F_1) \cap Attr_0(F_2)$ car si $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ alors
$Attr_0(F_1 \cap F_2) = \emptyset$ or il peut exister $v \in Attr_0(F_1) \cap Attr_0(F_2)$



$Attr_0(F_1) \cup Attr_0(F_2) \subseteq Attr_0(F_1 \cup F_2)$
$s \in Attr_0(F_1 \cup F_2)$ et $s \notin Attr_0(F_1) \cup Attr_0(F_2)$



$X \subseteq Y$
$Attr_0(X) \subseteq Attr_0(Y)$

Question 4 de la feuille

- Entre 2 b, il y a au moins 1 a :

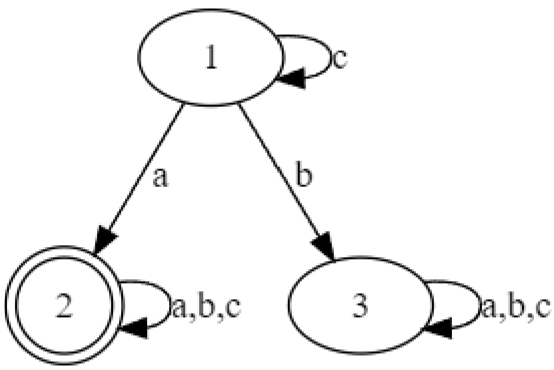
$$\text{Win} = \begin{array}{c} (V \setminus F_1)^\omega \cup \\ (V \setminus F_1)^*[F_1((V \setminus F_1)^* F_2 (V \setminus F_1)^*)]^\omega \cup \\ (V \setminus F_1)^*[F_1((V \setminus F_1)^* F_2 (V \setminus F_1)^*)]^* F_1 (V \setminus F_1)^\omega \end{array}$$

$$L = \begin{array}{c} (\Sigma \setminus b)^\omega \cup \\ (\Sigma \setminus b)^*[b((\Sigma \setminus b)^* a (\Sigma \setminus b)^*)]^\omega \cup \\ (\Sigma \setminus b)^*[b((\Sigma \setminus b)^* a (\Sigma \setminus b)^*)]^* b (\Sigma \setminus b)^\omega \end{array}$$

- On ne voit pas de b avant le premier a :

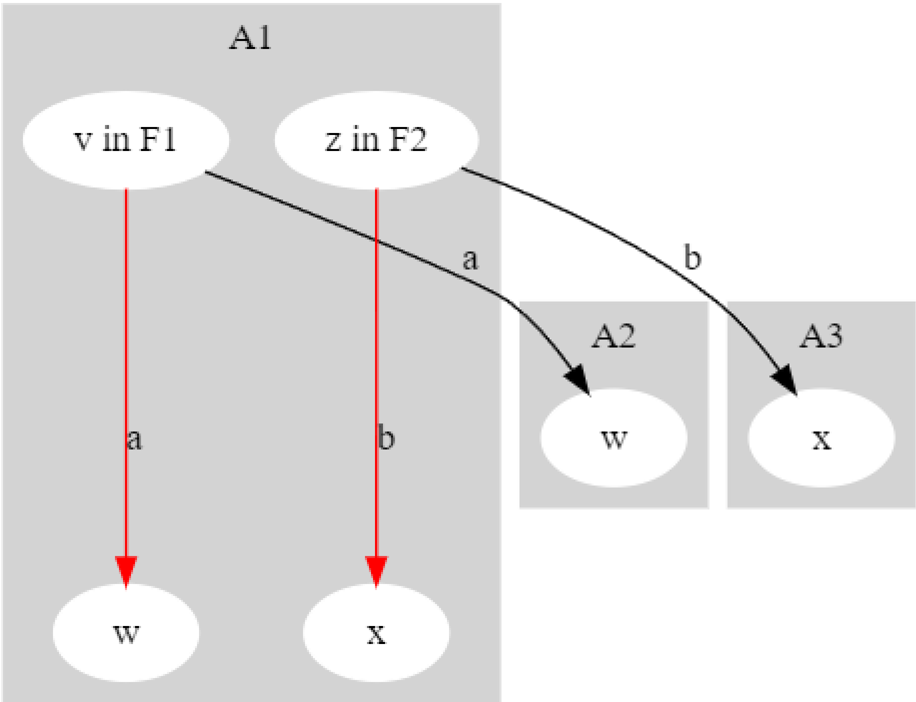
Win = $(V \setminus F_2)^* F_1 V^\omega$
$\Sigma = \{a, b, c\}$
L = $(a+c)^* a \Sigma^\omega = c^* a \Sigma^\omega$

I = {1}



F = {2}

On résout le jeu avec Win = $(V \setminus F_2) F_1 V^{\omega}$ en construisant une arène plus grande :



A2 et A3 sont des copies de l'arène A1.

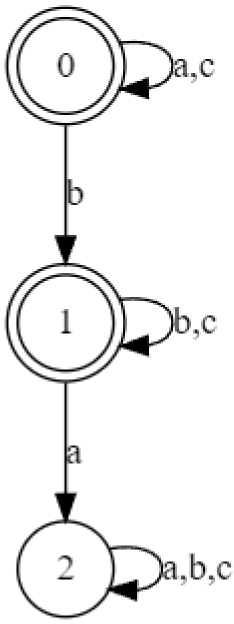
Elles (A2, A3) peuvent être compactées en 1 seul états.

$A_i$copies de A
$A' = (V_0', V_1', E')$
$V' = V \cup \{win, lose\}$
$F' = \{win\}$

$E' = E \setminus \{(u,v) \in E | u \in F_1 \cap F_2\} \cup \{(u, win) | u \in F_1\} \cup \{(u, lose) | u \in F_2\} \cup \{(win, win), (lose, lose)\}$

L= $(c+a)^* b (b+c)^*$ prefix-closed,
Si la condition Win d'un jeu est prefix-closed alors le jeu est un jeu de safety

I = {0}



Win = combinaison booléenne de Reachability et safety
ex : $(Reach(F_1) \wedge Avoid(F_2)) \vee Reach(F_3)$

Win = $(V \setminus F_2)^* F_1 (V \setminus F_2)^{\omega} \cup V^* F_3 V^{\omega}$

ex : $Reach(F_1) \wedge Avoid(F_2)$
$F_1 \cap F_2 = \emptyset$

$F_1' = F_1 \setminus Attr_1(F_2)$
$Attr_0^Y(X)$ = atteindre X sans passer par Y (attracteur conditionnel)
$X_{k+1} = X_k \cup \{u \in V_0 \setminus Y | ...\} \cup \{u \in V_1 \setminus Y | ...\}$

On montre que :
$W_0 = Attr_0^{F2}(F_1')$ région gagnante de P0
1) $W_0 \subseteq Attr_0^{F2}(F_1')$
P_0 a une stratégie σ_0 qui lui permet d'arriver dans F_1' sans avoir vu F_2 c'est la stratégie qu'on obtient du calcul de l'attracteur conditionnel. Dès que P_0 atteint F_1', elle applique σ_0' la stratégie pour éviter F_2.
La stratégie combinée σ_0 puis σ_0' est gagnante pour P_0 par construction

2) $\overline{Attr_0^{F2}(F_1')} \subseteq W_1$
$v \notin Attr_0^{F2}(F_1')$
P_1 a une stratégie σ_1 qui garantit soit de ne pas voir F_1', ou de voir F_2 avant de voir F_1' la première fois. On regarde une partie à partir de v où P_1 joue σ_1. Soit cette partie ne passe pas par F_1 → perdante pour P_0.
Si la partie passe par F_1, on a un chemin $v_0 \ldots v_n$, $v_n \in F_1$
On a 2 cas $v_n \in F_1'$ ou $v_n \in F_1 \setminus F_1'$
Si $v_n \in F_1' \Rightarrow_\sigma \exists j < n | v_j \in F_2$ → perdant pour P_0

Si $v_n \in F_1 \setminus F_1' \Rightarrow v_n \in Attr_1(F_2)$
P_1 joue stratégie d'attracteur vers F_2 à partir de v_n, $v_0 \ldots v_n$, $v_{n+1} \ldots v_m$, $v_m \in F_2$ perdant pour P_0